

EJERCICIOS

1. Calcular el rango de la matriz $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & -8 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Hallar las inversas de las siguientes matrices elementales. ¿Son sus inversas también matrices elementales?, en caso afirmativo describir la operación elemental que realizan.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Determinar el rango de las matrices siguientes. Estudiar si son regulares y en caso afirmativo calcular su inversa y en caso negativo calcular una matriz de paso a su forma canónica por filas.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

4. La criptografía es la ciencia que estudia el proceso de escribir en clave secreta un mensaje o de descubrir su contenido.

El siguiente proceso describe cómo usar matrices en criptografía:

- a) Se numeran los símbolos alfabéticos a usar con un orden preestablecido. Por ejemplo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T	U	V	W	X	Y	Z	.	,	" "
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

- b) Se fija una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ que tenga inversa. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

- c) Se traduce el mensaje que se desea transmitir a un mensaje numérico, en forma de vector columna. Por ejemplo usando la tabla del apartado a), si el mensaje que se

desea transmitir es abcd el vector que se obtiene es: $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

- d) Las componentes del vector columna obtenido en c) se redistribuyen en una matriz de n filas (como la matriz A). Si es necesario se completa con componentes de valor 30.

Sea $N \in \mathcal{M}_{n \times r}$ la matriz obtenida. En el ejemplo anterior sería $N = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 30 \\ 3 & 30 \end{pmatrix}$

- e) Se realiza el producto matricial $C = A N$. En el ejemplo

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 30 \\ 3 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & -222 \\ 5 & 60 \\ 22 & 226 \end{pmatrix}$$

- f) Se transmiten las componentes de la matriz C leídas por columnas:

$$\begin{pmatrix} -21 \\ 5 \\ 22 \\ -222 \\ 60 \\ 226 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- i) Calcula la inversa de la matriz A .

ii) ¿Cuál ha sido el mensaje enviado si se ha recibido $\begin{pmatrix} -64 \\ 19 \\ 68 \\ -97 \\ 21 \\ 102 \\ -213 \\ 60 \\ 214 \end{pmatrix}$?